

金融風險管理季刊

民93，第一卷，第一期，102-110

資產組合風險預測： Default Correlation 及 Asset Correlation

沈中華*

政治大學金融所所長

一、前言

巴塞爾協定II (Basel II) 由2001年開始推廣，迄今已近3年，政府、業者及學者也由關心標準法，逐漸到關心「內部法的基礎法」(Fundamental IRB, FIRB)，但大家在關心FIRB時，關心的重點均集中在個別公司違約機率(Probability of default, PD)的計算，這當然反映PD本身計算的重要性，但對得到PD之後的二個相關議題卻極少人討論。第一，資產組合的PD該如何計算？第二，將得到的PD代入公式求出最後資本計提的原理為何？

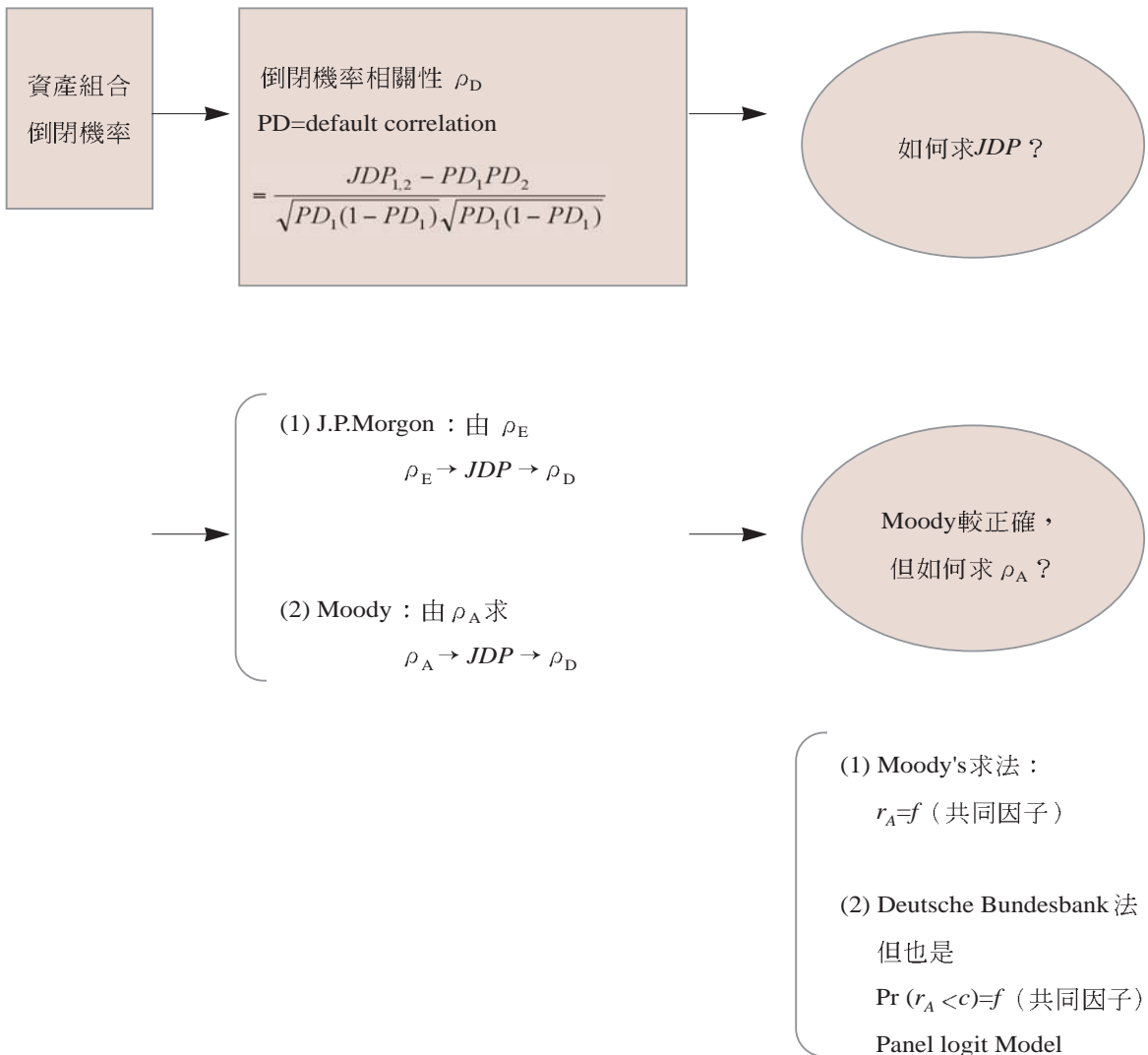
本文的目的即在討論這兩個重點。在學理上，這二個重點其實是一件事，即瞭解以下三個相關性的爭論：「倒閉相關性(Default Correlation)」，「資產相關性(Asset Correlation)」，即「股權相關性(Equity Correlation)」。就第一點而言，這相關性的研究是研究資產組合違約機率的第一步，不了解它們，不可能了解資產組合的風險。但我們回顧文獻及相關教科書，發現教科書在介紹它們時，彼此間有互相抵觸，這反映了這是一個新領域，學者也未必全然了解，尚未有定論，年輕學

* 作者通訊：沈中華，臺北市116文山區指南路2段64號，Tel:(02)29393091 #81020 Fax: (02) 29398004

者值得投入，也非常值得說明。在第二點上，當代入Basel II計提的公式中，這看起來很學理的名詞，似乎沒有什麼商機，卻引起Moody, Standard & Poor, Deutsche BundesBank 等知名投資銀行及央行爲此論戰，而Deutsche Bundes Bank也爲此事，贊助召開全球學術會議，主題即Asset

Correlation及Default Correlation，而之中的好文章且要登在Journal of Credit Risk，所以它決非表面上的沒有商機，而它的重要性也可見一般，本文說明這被忽略的一環的背後爭辯及學理。

我們的結論如下：



二、第一個重點：倒閉機率相關性才重要，但無法直接計算

當要計算一家公司的倒閉機率並不難，但要計算一「資產組合」的倒閉機率則幾乎不可能，其中乃由於「倒閉機率的相關性 (P_D)」並不易求出。許多文章會如此說：對任一家擁有數十萬客戶而言，計算每一家公司的違約機率並不足夠，仍必須計算二家公司倒閉機率的「相關係數」，但因為有數十萬家公司，所需要計算的相關係數為非常龐大，例如十家公司，則要計算配對的倒閉機率為 $(10 \times 9) / 2 = 45$ ，更遑論當有一百家、一千家的公司時，要計算其倒閉相關性是不可能了！

其次，即使可以同時估計二個公司的 ρ_D ，但其計算的 ρ_D 往往會是非常低。試想台積電可能倒閉，聯電也可能倒閉，但二者同時倒閉機率則非常非常低，它們同時倒閉往往是受外界一共同因子影響（請多注意這句話），所以無法像計算2家公司股價的相關性一樣地計算倒閉相關性。

公司 2 的 資 產	公司1倒閉	均未倒閉
	同時倒閉	公司2倒閉

公司1的資產

雖然計算如此困難，但由於資產組合信用風險關心的正是它，我們仍必須探討如何計算它，它的公式為

$$P_D = \text{Default Correlation} \\ = \frac{JDP_{1,2} - PD_1 PD_2}{\sqrt{PD_1(1 - PD_1)} \sqrt{PD_2(1 - PD_2)}} \quad (2)$$

式中 PD_1 及 PD_2 為第一家與第二家公司的倒閉機率， $JDP_{1,2}$ 代表第一家與第二家公司的 Joint Default Probability = Prob (公司1倒閉 × 公司2倒閉) = $PD_1 + PD_2 + \text{prob}$ (公司1倒閉 + 公司2倒閉)，上式中的 PD_1 及 PD_2 可容易求出，但 $JDP_{1,2}$ 並不易求出。也因此，我們關心的重點應在回答： $JDP_{1,2}$ 如何計算？

2.1. JDP 如何計算？ J.P. Morgan 的回答：由 Equity Correlation 計算

J.P. Morgan 的 CreditMetrics 強調的是 Equity Correlation，所以它由其下手以求 JDP 。由於所謂倒閉，即淨值或 Equity (E) 小於零，所以

$$PD = \int_{-\infty}^0 P(E, \bar{E}, \sigma_E) dE \\ \text{令 } z_1 = \frac{E_1 - \bar{E}_1}{\sigma_{E_1}} \\ z_2 = \frac{E_2 - \bar{E}_2}{\sigma_{E_2}}$$

再令 $\phi(\cdot)$ 為標準常態分配，上式即可改為

$$PD = \int_{-\infty}^{-\bar{E}/\sigma_E} \phi(z) dz \\ = \int_{-\infty}^{-c} \phi(z) dz \\ = \Phi(-c)$$

式中 $c = \bar{E} / \sigma_E$ ， Φ 為常態分配的CDF。由於我們知道 PD ，則 c 也可求出，即 $c = \Phi^{-1}(PD)$

將上求倒閉觀察延伸到二個要素，我們先創造出一個名詞： JDP_E ，則

$$JDP_E = P(z_1 < -c_1, z_2 < -c_2) \\ = \int_{-\infty}^{-c_1} \int_{-\infty}^{-c_2} \phi(z_1, z_2, \rho_E) dz_1 dz_2 \quad (3)$$

式中 JDP_E 代表由Equity Correlation求出的 JDP ，它就是要被用來代替了式(2)的 $JDP_{1,2}$ ，而 $\phi(\cdot, \cdot, \rho_E)$ 為雙變量標準常態分配，即

$$\phi(z_1, z_2, \rho_E) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_E^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(z_1^2 - 2\rho_E z_1 z_2 + z_2^2)}{\sqrt{1-\rho_E^2}} \right]$$

式中 ρ_E 為 z_1 及 z_2 的相關係數，又稱之為Equity Correlation。

因為 c_1 及 c_2 可以由 PD_1 及 PD_2 代入及常態分配求出， ρ_E 為股價相關性，這式(3)可求解出。即其方法為 $\rho_E \rightarrow JDP \rightarrow \rho_D$ ，所以雖然J.P. Morgan的Credit Metrics的方法沒明說如何進行，但它的思考為

Step1：求出 PD_1 及 PD_2 ，當然也求出了 C_1 及 C_2

Step2：求出 z_1 及 z_2

Step3：用二個公式的股價求出 ρ_E

Step4：求出 JDP ，再代入式(2)求出 ρ_D

所以J.P.Morgan的觀念是由Equity Correlation求出 JDP ，再代入式(2)求出Default Correlation。當Equity Correlation上升，則Default Correlation也上升。

對J.P.Morgan JDP_E 的評論

1. 在Step3，正確的E應是用股價×流通在外股數，再求出 z ，而非股價。而 ρ_E 是否只是用股價？這些J.P.Morgan及相關教科書均未詳說，必須不斷研究才可得知。

2. Equity Correlation的觀念不對，應用Asset Correlation，見下小節Moody對其的評論

2.2. JDP如何計算？ Moody的回答：Asset Correlation

在Moody的研究群中，談到JDP應該是由Asset Correlation求出，團隊中的Zeng & Zhang (2002)文章的標題正是：Measure credit correlation：equity correlations are not enough，其推理過程可詳見文章¹，明顯地批評J. P. Morgan犯了一個明顯的錯誤，也可見Moody (2001a, 2001b)。其表面原因當

¹ 該文說 $Cov(r_{Ai}, r_{Aj}) = (1-\omega_i)(1-\omega_j)Cov(r_{Ei}, r_{Ej}) + (1-\omega_i)\omega_jCov(r_{Ei}, r_{Ej}) + \omega_i(1-\omega_j)Cov(r_{Fi}, r_{Ej}) + \omega_i\omega_jCov(r_{Fi}, r_{Ej})$

E是Equity，F是free risk asset，則asset correlation會大於equity correlation，所以說equity correlation is not enough。

然是追求真理，背後原因是Moody在2001年併吞了KMV這家公司，而KMV的專長即是由股價反推出資產的市價，一舉侵佔J. P. Morgan的市場。他們認為當A(資產)、E(股權)及L(負債)有下列關係：

$$A_i = E_i + D_i$$

由右方可推得 股權由股價 假設為面值
A的市價 來，為市價

由於

$$A < D \text{ 倒閉}$$

有時D是短期負債+0.5長期負債，稱之為倒閉點。

則令 A_i 為第i家公司資產的市價， σ_{A_i} 為第i家公司資產的標準差

$$JDP_A = \int_{-\infty}^{D_1} \int_{-\infty}^{D_2} F(A_1, A_2, \rho_A) dA_1, dA_2 \quad (4)$$

$$F_A(A_1, A_2, \rho_A) = \frac{1}{2\pi\sigma_{A1}\sigma_{A2}\sqrt{1-\rho_A^2}} \cdot \exp \left\{ -\sum_{1-\rho_A^2} \left[\left(\frac{A_1}{\sigma_{A1}} \right)^2 - 2\rho_A \left(\frac{A_1 A_2}{\sigma_{A1}\sigma_{A2}} \right) + \left(\frac{A_2}{\sigma_{A2}} \right)^2 \right] \right\} \quad (5)$$

式中 JDP_A 代表Moody法求出的JDP，即將 JDP_A 代入式(2)的 $JDP_{1,2}$ ，而 ρ_A 為資產的相關性，所以 $\rho_A \rightarrow DP \rightarrow \rho_D$ 。

計算 $F_A(A_1, A_2, \rho_A)$ 需要先計算 σ_{A_1} 、 σ_{A_2} 、 A_1 及

A_2 ，且 A_i 是資產市價，這4個變數可以 (σ_{A_1}, A_1) 為一組，再用Merton (1974)的方法：即由已知的E及D，與下列二個等式，則有二未知二等式，即可求出：

$$E_0 = A_0 N(d1) - D_1 e^{-rT} N(d2); E_0 \sigma_E = A_0 \sigma_A / N(d1),$$

同樣地邏輯適用 (σ_{A_2}, A_2) ，這步驟以下均簡稱Merton的方法。

但Moody及所有文章及教科書均未說： ρ_A 如何求？即資產相關性如何求？當我們回答這個問題時，竟同時回答前言的第二重點。

Moody的方法可整理如下：

Step 1：估計 σ_{A1} 、 σ_{A2} 、 A_1 及 A_2

Step 2：求出 ρ_A ，但如何求出？

Step 3：求出 F_A

Step 4：求出 JDP_A

Moody發現當 $\rho_A=0.19$ ，則 ρ_D 約=0.013

如果了解上述中的式(5)，則計算雙元常態分配的CDF是一關鍵，也了解Moody為何因此推導快速公式計算 F_A 。

三、求出 ρ_A (資產相關性)，才能求出 ρ_D

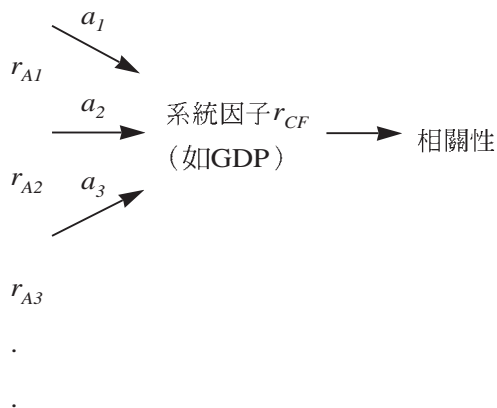
3.1. Moody 方法

但如何算Asset Correlation(ρ_A)？本文在找尋答案時並不成功，非常驚訝所有相關教科書(Crouhy, Galai and Mark, 2003; Altman and Saunder, 2002; Bessis, 2001; Marrison, 2002; Glantz,

2002；Ong，1999等)均未明確地提及，故以下為本文的建議方法。一般認為有兩個方法，第一、求出所有 A_i ，再求兩兩相關的資產相關性，第二、利用共同因子的觀念，Moody似乎建議用第二個方法。

第二個方法結合二個觀念，第一個即是計算資產報酬 (Asset return)： r_A ？即利用前述Merton的方法，由股價及負債，求出資產市價的 A_i ，再求出 r_A 。其次，再進行二個假設，第一，利用Gordy (2002)的「漸近單一風險因子」(Asymptotic Single Risk Factor, ASRF)的觀念，也可稱之為「共同因子觀念」。Gordy (2002)提出一個思考方式，他解釋每一個公司的資產都受一個系統變數(共同因子)影響，通常為GDP，或失業率等，這「共同因子」也可見Lopez (2002)，BIS (2004)，沈中華與張家華 (2004)，這共同因子觀念也有點像CAPM的理論，即所有股酬都受大盤影響，如果我們這樣表達

第一個假設： r_A 受到共同因子影響



a_i 是第*i*家公司資產與共同因子的相關係數，再假設所有公司的影響相同，即第二個假設：

$$a_i = a_j = \dots = a \quad \forall i$$

利用上述的第一個假設， r_A 可拆成二個區塊，一為共同因子(r_{CF})的影響，另一個為自己獨特的影響 ε_{Ai} ，例如：

$$r_{A1} = a_1 r_{CF} + b_1 \varepsilon_{A1} \quad (6a)$$

$$r_{A2} = a_2 r_{CF} + b_2 \varepsilon_{A2} \quad (6b)$$

$$\text{令 } \text{Var}(\varepsilon_A) = 1$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{Ai}, \varepsilon_{Aj}) = 0$$

由於要計算 ρ_A ，必須先知道系統共同因子 (Common Factor, CF)，Lopez建議如下：

$$r_{CF} = r_{\text{該國全體}} + 0.6r_{\text{全球該產業}} + 0.4r_{\text{全球該因素}}$$

而(r 為報酬)，一般言， $r_{\text{該國全體}}$ 即GDP，則先用OLS估計Asset return對CF的迴歸可得到 a^2

$$\rho_A = a_2 a_2 \sigma_{CF} \quad (7)$$

Moody的 $\rho_A = a^2 \sigma_{CF} = R$

也可表達成

$$r_{Ai} = a_1 r_{\text{全球}} + a_2 r_{\text{國家}} + a_3 r_{\text{產業}} + \varepsilon_{\text{自己}}$$

Lopez的實證結果如下：

Firms	Number of Firms	Asset相關性	
		99.55%	99.9%
U.S. Firms	6,909	0.1625	0.1625
Japanese Firms	3,255	0.2625	0.2625
European Firms	3,675	0.1250	0.1375

對Moody的評論：

- (1) σ_A 及A的計算必須靠Merton法。
- (2) 共同因子係數相同（但Basel II 接受此觀念）

3.2. Deutsche Bundesbank(DB)求

Hamerle, Liebig and Scheule (2004, HLS) 來自DB，他們建議的計算方式如下：定義 r_{At} 為A公司在t期的資產報酬率， c 是一倒閉門檻，且

$$y_{it} = \begin{cases} 1, \text{倒閉} & r_{At} \leq c \\ 0, \text{沒倒閉} & r_{At} > c \end{cases} \quad (8)$$

又令其之間共同因子為X及Z，其中為該公司股酬，為系統因子(例如失業率)

$$r_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{it-1} + \beta_2 Z_{it-1} + bf_t + \mu_{it} \quad (9)$$

式中， f_t 代表沒有被包含在的系統因子，且

$$f_t \sim N(0,1)$$

令 $\mu_{it} \sim N(0, \sigma_\mu^2)$ ，如果 μ_{it} 為logistic，則 $\text{Var}(\mu) = \pi^2/3$ ，此模型也可見Pitts (2004) 登於Risk Magazine的更複雜模型。

$$\begin{aligned} \rho_A &= \rho(r_{it}, r_{jt}) \\ &= \frac{\text{Cov}(r_{it}, r_{jt})}{\sqrt{\text{Var}(r_{it})} \sqrt{\text{Var}(r_{jt})}} \\ &= \frac{\text{Cov}(bf_t + \mu_{it}, bf_t + \mu_{jt})}{\sqrt{\text{Var}(bf_t + \mu_{it})} \sqrt{\text{Var}(bf_t + \mu_{jt})}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \frac{b^2}{b^2 + \sigma_\mu^2} \quad (11)$$

由於 r_A 因子計算複雜，DB 又不願用Moody的方法求出A，再求出 r_A ，所以 r_A 為未知，而又由式(8)得知，重點是估計b及 σ_μ^2 ，以求出 ρ_A 。

HLS 假設

$$\begin{aligned} \lambda_{it} &= p(y_{it} = 1 | \Omega_{t-1}, f_t) \\ &= p(r_{it} \leq c | \Omega_{t-1}, f_t) \quad (\text{由式(8)}) \\ &= p(u_{it} \leq c - \beta_0 - \beta_1 X_{it-1} - \beta_2 Z_{it-1} - bf_t | \Omega_{t-1}, f_t) \\ &= K(\beta_0 + \beta_1 X_{it-1} + \beta_2 Z_{it-1} + bf_t) \end{aligned}$$

DB 進行步驟：

Step1：用logit panel random effect 求出b及 σ_μ^2 。

Step2：代入式(11)，求出 ρ_A 。

他們一般的看法， $b=0.1205$ ， $\rho_A=0.044$ 。

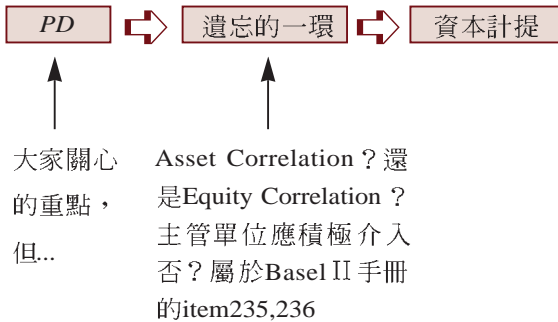
對DB方法的評論：

- (1) 為何資產報酬小於一門檻為倒閉？(淨值 < 0 才應是倒閉的)。
- (2) 倒閉是資產存量 $< c$ 或資產流量 $< c$ ？我們認為應該是存量，但DB卻用流量，但嚴格地說，當期的資產報酬即使為負也不代表倒閉。
- (3) 式(10)假設 $X_{i\pi} = E(X_{it})$ ， $Z_t = E(Z_t)$ ，但並不合理，也待說明。
- (4) 其特點在於一般random effect的常數項是指各公司有未消除的error term，但這裡強調有未消除的時間error term。
- (5) 另一特點是不用求 r_A 。
- (6) 未提重點在求出default correlation，在

式(8)予以感覺，將 ρ_A 視為 default correlation。

四、第二個重點：遺忘的一環

我們要討論的主旨可說明如下：



從 PD 到資本計提應是屬於 BIS 的 Quantitative Impact Study 3 的第235項及第236項，以235項為例的一般公司為例：

$$\begin{aligned} \text{Correlation}(R) = & 0.12 \left(\frac{1 - e^{-50 \times PD}}{1 - e^{-50}} \right) \\ & + 0.24 \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \times PD}}{1 - e^{-50}} \right) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \text{Capital requirement}(k) = & LGD \times N \left[\left(\frac{G(PD)}{(1-R)^{0.5}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{R}{1-R} \right)^{0.5} \times G(0.9999) \right] \\ & \times \left[1 - \frac{1.5}{b(PD)} \times (1 + (M - 2.5) \times b(PD)) \right] \end{aligned} \quad (12b)$$

式中

$$b = (0.08451 - 0.05898 \times \log(PD))^2$$

G ：常態分配的反函數

N ：常態分配

LGD ：Loss Given Default

$G(0.9999)$ 代表主管採用99.99%的信賴區間

所以只要得到 PD ，即可計算得到 R ，再得到 k 。一般人並不問為什麼這公式的係數的來由，但其實這公式有三個議題：

- (1) R 是 Asset Correlation、Equity Correlation 或 Default Correlation?
- (2) R 中的0.12、0.24及整個設計均表示 R 與 PD 是負相關，為什麼？這論點是適合大銀行或小銀行？這國際的標準可由台灣實證得到支持嗎？如果不適台灣，台灣有多少權力要求更改？
- (3) $G(99.99\%)$ 的99.99%代表信用區間，而99.99%代表政府要求銀行為A評等，政府有權在不景氣時，只要求銀行的評等為BB嗎？即改用 $G(99.75\%)$ 嗎？如果可以，在什麼狀況下可以？

由於篇幅有限，本文只討論(1)，而不討論(2)及(3)。

由式(4)及(5)，我們可反推得到 $\rho_A = H(PD_1, PD_2, A_1, A_2, \sigma_{A1}, \sigma_{A2})$ ，式中 H 為一函數，又由於Moody的第二個假設：相同的相關係數 a_i ，所以可省略一個 PD 。投資銀行及學者們經過三年的激辯（本處略過不討論），終於訂下式(12a)，所以上述的 ρ_A 即 R ，而Basel II在用上述(12a)時，完全接受共同因子這觀念。

五、結論

- (1) 正如本文的題目所說default correlation (ρ_D) 才重要，但要藉重asset correlation (ρ_A) 才計算出，而計算方式如下： $\rho_A \rightarrow JDP \rightarrow \rho_D$ ，故學者應研究如何計算 ρ_A ，但其目的是 ρ_D 。
- (2) 計算 ρ_A 的方式仍不完全明確，各大機構Moody及德意志銀行提供的方式均有缺陷，仍待未來研究以澄清。
- (3) R在Basel II指的是asset correlation，其利用共同因子解決這問題，但仍必須有一簡單明確方式說明。
- (4) 對電腦軟體的建議：雙變量常態分配的CDF將是一重要電腦工具。Panel Logit Model也日益重要。

Reference

- 沈中華，張家華 (2004) 「違約率與總體經濟相關性」，信用資訊月刊
- 沈中華 (2004) 「資產相關性: 穆迪與摩根的決戰」，經濟日報
- Allen L. & Saunders (2003) "A survey of cyclical effects in credit risk measurement models," BIS Working Papers, No.126
- Basel Committee on Banking Supervision (2001) "Potential Modification to Committee's Proposal"
- Bessis J. (2002), Risk Management in Banking, John Wiley
- Crouhy M., Galai D. & Mark R. (2003), Risk Management, McGraw Hill
- Glantz M. (2003), Managing Bank Risk, Academic Press
- Gordy(2002) "A Risk Factor Model Foundation for Rating Based Bank Capital Rules," <http://www.financierisks.com/Credit%20Risk.htm>
- Hamerle A., Liebig T. & Rösch D. (2003) "Credit Risk Factor Modeling and the Basel I II IRB Approach," Deutsche Bundesbank, Working Paper
- Hamerle A., Liebig T. & Rösch D. (2004) "Forecasting Portfolio Risk", Deutsche Bundesbank
- KMV (2001a) "An Empirical Assessment of Asset Correlation Models"
- KMV (2001b) "Response to JP Morgan's paper "Using Equities to Price Credit" "
- Zeng A. & Zhaug H. (2001) "Measuring Credit Correlation : Equity Correlation Are Not Enough," <http://www.moodyskmv.com/>
- Lopez J. A.(2002) "The Empirical Relationship between Average Asset Correlation, Firm Probability of Default and Asset Size," FRBSF Working Paper
- Marrison C. (2002) Fundamentals of Risk Measurement, McGraw Hill
- Pitts, A, (2004) "Correlated default : let's go back to the data," Risk Magazine

本文寫作時，感謝聯徵中心敬永康、賴柏志及張家華的討論。也感謝東吳商數系張揖平教授的指正。