金融風險管理季刊
民93，第一卷，第一期，111-125

信用評等模型驗證之初探—相關方法與文獻回顧

本中心風險研究小組
孫銘誼，王思芳

一、前言

鑑於新版巴塞爾資本協定將於民國九十五年年底正式實施[1]，國內金融界莫不致力於相關規範研究與因應策略。特別地，金管會銀行局（前身爲財政部金融局）基於推廣暨提升我國金融監理與風險管理與國際同步，特與中華民國銀行公會共同成立新巴塞爾資本協定共同研究小組，分組進行法規與相關理論實務之探討。其中，有關信用風險內建評等法（以下簡稱IRB法）之研究，尤其受到銀行界之重視。在IRB法相關規範中，最引人注目之處，則在於評等模型之驗證，亦爲准駁金融機構實施IRB法之要件。職此，本文拋磚引玉，以信用評等模型驗證爲題，參考理論與實務相關論述，彙整模型驗證相關考量面向，並透過具體實例，介紹目前理論上以及實務界採行之驗證方法，供國內金融機構建置內建模型之參考。惟此處須強調，本文僅以量化驗證內容進行介紹，其他非量化驗證之內容，未來將視此一領域發展，適時介紹時新理論與驗證方法。當金融機構能夠有效地驗證內建模型評等結果，除了對於模型之建置可事半功倍外，亦可有助於經營策略規劃。若能通過主管機關資格審查，對於機構聲譽與市場競爭力，其效益不可言喻。

以下內容將說明有關IRB法最低作業要求草案中，所建議採行之評等結果驗證方法，並輔以實際案例加以說明。對欲採行IRB法之銀行，或可參考以下方法驗證內建評等模型之有效性。

[1] 有關信用風險進階內建評等法及作業風險進階衡量法，將於民國九十六年年底正式實施。

二、驗證架構

驗證的目的主要在了解評等模型是否可充分解釋授信戶的信用狀況。由於模型建置所使用的樣本資訊多可被模型解釋，因此必須瞭解模型是否在不同樣本下還具有足夠的解釋能力，所以必須對模型進行樣本外的測試，觀察模型是否有過度學習的傾向，而造成預測能力的降低。此外，由於不當樣本的取樣方式以及忽略攸關資訊皆會造成模型偏誤，為了避免此種情況，必須藉助於其他外部資訊，藉此瞭解評等模型之效力是否足夠。不僅如此，由於評等模型的主要目的為預測，為了避免因總體經濟的巨大改變而造成模型解釋上的偏誤，降低模型預測能力，因此模型是否在任何情況下皆能正常運作，也是必須驗證的範圍。以下將就評等模型的驗證架構作一介紹。

1. 回顧測試

利用與建置模型不同之樣本(Out-sample)，包括：不同期間下建置模型時未涵蓋的樣本；同期間下建置模型時未涵蓋的樣本；不同期間下建置模型時涵蓋的樣本，藉此了解模型在樣本外之預測能力。

2. 標竿化比較

針對個別借款戶或額度之評等結果與其他評等機制結果比較，分析差異的來源以確認其差異之合理性，其比較對象可以來自於市場資訊（利差）、第三人（如外部評等機構、外部模型…）及內部（原有評等系統）的評等結果。與回顧測試不同的是，標竿化著重於不同預測者的差異；而回顧測試著重於預測評等與實際評等間的差異。

3. 評等校準

由於單考慮模型全面的效力會隱藏預測能力不佳的部份，因此需同時檢視模型全面的效力和個別部門的效力。校準即為檢視各個情況下的偏差並對各個情況下的偏差進行調整。使模型的預測能更為精準。比較並確認內建評等各等級之風險成分值之合理性，其比較的對象可以是歷史經驗、外部機構之評等與模型結果或其他內建評等結果；比較基礎可以是風險成分值、預期損失或未預期損失；比較方式可以單一、多個等級或全部資產的方式以確認其合理性。藉此觀察是否有重大差異。校準和標竿化之不同於校準的目標在於相同等級下的風險權數是否一致，而標竿化在於觀察評等結果是否一致。

4. 壓力測試

以設算或情境分析的方式模擬當經濟緊縮或重大不利事件發生時風險成分值可能產生的變化及損失情形。

三、驗證方法

驗證評等模型的效力主要分成三個構

面-1.正確性：模型區別正常授信戶和違約授信戶的正確性。2.等級區隔同質性分析：評等模型是否具有足夠的等級能將不同信用特性的授信戶區隔出來，使同一等級內的所有授信戶的信用特性為同質的。3.穩定度：一個完善的評等模型必須考慮到外在經濟因素影響程度，將評等的結果單純反映各別授信戶的信用狀況，使評等結果為一長期穩定的趨勢而不受短期波動所影響。以下就評等模型在各個構面之下的驗證方法予以說明。

1. 正確性驗證

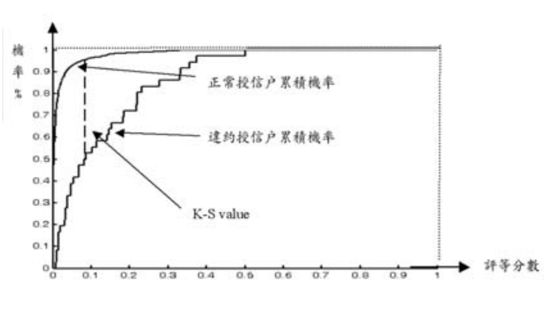
驗證評等模型是否具有足夠的能力區別信用狀況的好壞，並評估模型的誤差率是否合理可接受範圍內。建議方法包括(但不限於下列方法)：

1.1. Kolmogorov-Smironov Test

信用評等模型應該要能區別出違約授信戶和正常授信戶之間的差異。因此，違約授信戶的評等分數分配應異於正常授信戶的評等分數分配。因此可利用K-S檢定，來驗證是否約授信戶的評等分數分配異於正常授信戶的評等分數分配，以此了解信用評等模型能否區別出違約授信戶和正常授信戶。

K-S檢定的理論基礎為：

當兩個樣本累加相對次數分配的差異非常接近，且差異為隨機時，則兩樣本的母體分配應該為一致；反之，當兩母體分配並不一致時，樣本累加相對次數分配的差異會很顯著。如【圖1】所示



【圖1】 正常授信戶和違約授信戶累積機率分配

其檢定步驟為：

步驟1：計算正常授信戶和違約授信戶在各評分階段下的累加機率。

步驟2：計算各階段累積機率之差。

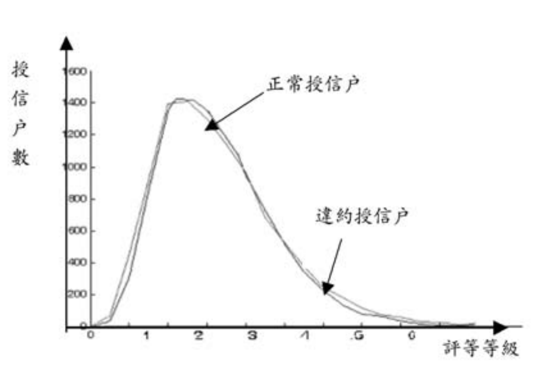
步驟3：找出最大的累積機率之差，此即為K-S Value。

當信用評分模型建置完成後，我們可以使用K-S Test來檢定正常授信戶和違約授信戶的評分分配是否一致；當K-S Value越大時，越能證明正常授信戶和違約授信戶的評分分配並不一致，因此越能利用評分去區分正常授信戶和違約授信戶的差異。

1.2.吉尼係數（Gini Coefficient）

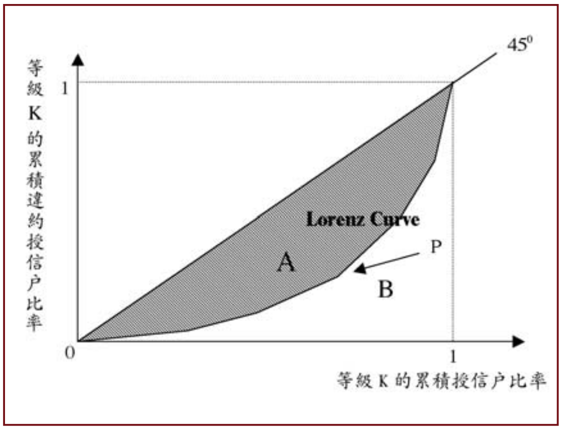
信用評等模型所給予正常授信戶和違約授信戶的評等應該會所有差異。吉尼係數本質上為一變異量，旨在量化各資料

點間之差異。如【圖2】所示，當模型無法判斷正常授信戶和違約授信戶之間的差異時，正常授信戶和違約授信戶的評等等級分配會是一致的。



【圖2】正常授信戶和違約授信戶的評等等級分配

如【圖3】所示，點P的X軸表示評等在某一評等等級(K)之下的累積授信戶與總授信戶的比率；Y軸表示評等在某一評等等級(K)之下的累積違約授信戶與總違約授信戶的比率。Lorenz 曲線即爲在各個評等之下的每一點所連線而成的。當模型無法判斷正常授信戶和違約授信戶之間的差異時，Lorenz 曲線將和圖中45度線重疊。因此Lorenz 曲線和45度線涵蓋的區域即爲正常授信戶和違約授信戶分佈差異的量。吉尼係數即爲量化Lorenz 曲線和45度線涵蓋的區域占整個45度線下方面積之比率。利用數量表示： $= \frac{A}{A+B} = \frac{A}{0.5} = 2A$ ，吉尼係數即爲Lorenz 曲線和45度線涵蓋區域的兩倍。



【圖3】 Lorenz 曲線

通常我們可以利用一個數學公式表示之：

$$G = \left|1 - \sum_{K=0}^{K=n-1} (X_{K+1} - X_K)(Y_{K+1} + Y_K)\right| \qquad (1)$$

G：吉尼係數

X：累積授信戶比率

Y：累積違約授信戶比率

K：評等等級

一般而言吉尼係數介於0和1之間；當吉尼係數等於1時，表示因爲信用評等模型造成正常授信戶和違約授信戶的評等等級分配情形差異最大，因此，信用評等模型能完全區隔正常授信戶和違約授信戶的差異。反之，當吉尼係數等於0時，信用評等模型並無造成正常授信戶和違約授信戶評等等級分配有所差異，因此，信用評等模型完全無法區隔正常授信戶和違約授信戶的差異。

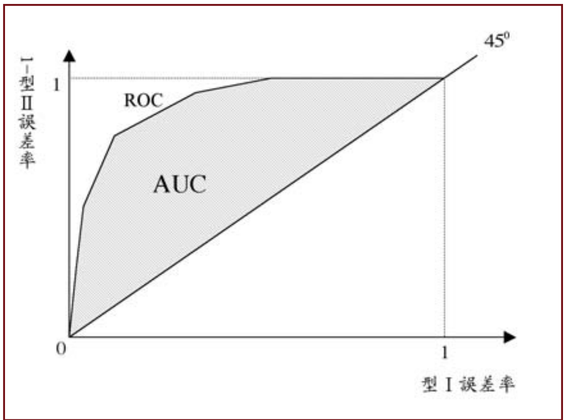
1.3. Receiver Operating Characteristic (ROC)

當銀行決策者依據評分結果，設定截斷點爲C的情況之下，區分正常授信戶和違約授信戶時，勢必會面臨到型Ⅰ誤差（正常授信戶卻被歸類於違約授信戶）和型II誤差（違約授信戶卻被歸類於正常授信戶）的結果。如【表1】所敘。

【表1】給定臨界值下的決策結果

截斷點C		違約授信戶	正常授信戶
rating	高於臨界值	預測正確	型Ⅰ誤差
score	低於臨界值	型II誤差	預測正確

ROC曲線即決策者依據此一評分結果，將所有可能的截斷點下所造成的型一誤差率(false alarm rate)和1-型二誤差率(hit rate)，繪製而成的。如【圖4】所示：



【圖4】 ROC 曲線

當ROC曲線越向(0，1)拗折，表示評分模型越能區別出正常授信戶和違約授信戶。換言之，當ROC曲線下方面積越大，表示評分模型越能做出正確的區隔。爲此，我們定義ROC曲線下方的面積爲AUC (area under curve)。AUC可解釋爲在所有決策之下，驗證評分模型對區別正常授信戶和違約授信戶的平均能力。當AUC值爲0.5時，表示以隨機的形式區分正常授信戶和違約授信戶；當AUC值爲1時，表示能完全區隔正常授信戶和違約授信戶。因此就實際而言，AUC值爲介於0.5和1之間(0.5以下無意義)。

通常我們可以利用一個不偏估計統計量來表示AUC：

$$\hat{U} = \frac{1}{N_D \times N_{ND}} \sum_{(D,ND)} u_{D,ND} \qquad (2)$$

$$u_{D,ND} = \begin{cases} 1 & if \quad S_D < S_{ND} \\ \frac{1}{2} & if \quad S_D = S_{ND} \\ 0 & if \quad S_D > S_{ND} \end{cases}$$

N_D爲總違約授信戶之數量；

N_{ND}爲總正常授信戶之數量；

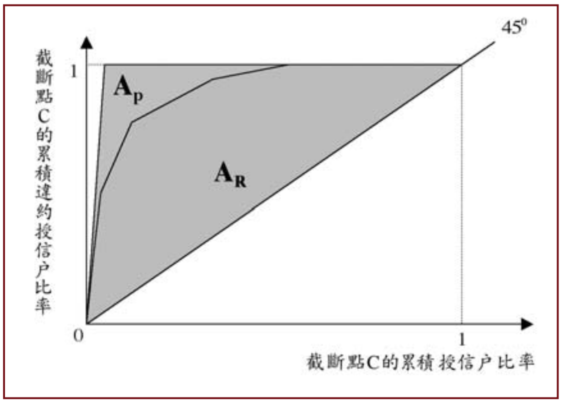
S_D爲違約授信戶的信用評分；

S_{ND}爲正常授信戶的信用評分。

1.4. Cumulative Accuracy Profile(CAP)

信用評等模型會將違約授信戶評分歸類在最低的評等分數當中，在這個假設之下，如果評分模型有K種評分結果{S_1，…………………，S_k}，而且S1<…………<Sk，越低的評分表示越低的

信用狀況。在此種情況之下，在各個評分結果之下的累積違約授信戶比率應該會等於累積總授信戶比率乘上違約率。理論上，在各個評分結果之下的累積違約授信戶比率應該會等於累積授信戶比率乘上違約率，其間的差異即爲模型解釋正常授信戶和違約授信戶錯誤的部份。而CAP曲線即爲描述各個評分結果之下，累積違約授信戶比率和累積授信戶比率的關係。其圖形表示如【圖5】：



【圖5】 CAP 曲線

在最佳的情況之下，CAP曲線會是一條斜率爲(1/違約率)而且會停留在1的直線。反之，在完全沒有區別能力下，信用模型的CAP曲線會是一條45°的直線。因此，就眞實的評分模型而言，其CAP曲線會介於兩者之間。一般而言，我們會將CAP曲線加以量化，此一量化數値即爲準確率(AR)。準確率的定義爲介於評分模型的CAP曲線和45°線間的區域AR，與介於45°線和完美模型的CAP曲線間的區域Ap的比率：

$$AR = \frac{A_R}{A_P} \tag{3}$$

AR値會介於1和0之間；[2]越接近於1，表示信用評分模型越能做出正確的區分；反之，越接近於0，表示信用評分模型越無法作出正確的區隔。

一般而言我們可以利用一個不偏估計統計量來表示AR：

$$\hat{V} = \frac{1}{N_D \times N_{ND}} \sum_{(D,ND)} v_{D,ND}$$

$$v_{D,ND} = \begin{cases} 1 & if \quad S_D < S_{ND} \\ 0 & if \quad S_D = S_{ND} \\ -1 & if \quad S_D > S_{ND} \end{cases} \tag{4}$$

N_D爲總違約授信戶之數量；N_{ND}爲總正常授信戶之數量；S_D爲違約授信戶的信用評分；S_{ND}爲正常授信戶的信用評分。

2. 等級區隔同質性驗證

假設信用風險模型能正確區別正常授信戶與違約授信戶之間的差異，則模型也應該區隔出不同信用品質的授信戶。良好的評等等級區隔會將相同信用品質之授信戶歸爲同一信用等級之內；換句話說，同一等級之內的授信戶其違約要素

[2] 當各資料點可以細分的情況之下，吉尼係數等於準確率(AR)。

的差異會最爲相近，爲此良好的評等區隔會使評等等級內的組內變異達到最小。若假設同一等級內的K個授信戶都有著相同的PD，在此情況之下，等級內所有授信戶必爲呈二項分配；即違約與否是彼此獨立的，換句話說，等級內所有授信戶的違約要素必爲同質，即組內變異爲最小。若等級內所有授信戶不爲同質的，也就表示違約與否並非彼此獨立，則此一等級所估計的違約機率並不準確。因此，爲了解是否評等等級區隔會將相同信用品質之授信戶歸爲同一信用等級之內，以及是否具有足夠等級將不同信用品質的授信戶區隔出來，我們必需了解等級區隔的合理性。建議方法如下(但不限於下列方法)：

2.1.Binomial Test

當某一包含K個授信戶的等級內，其總違約數(D_K)大於臨界值(critical value) 時，在信類水準爲α下，我們會拒絕在此一評等等級內授信戶違約與否並非彼此獨立；換句話說，即無充分證據證明駁斥我們等級內授信戶的違約要素爲異質，或者是說組內差異並非最小。臨界值$d_{k,a}$的計算方式 如下：

$$d_{K,\alpha} = \min\left\{ d : \sum_{i=d}^{K} \binom{K}{i} PD^{i} (1 - PD)^{K-i} \le \alpha \right\} \tag{5}$$

由於Binomial Test忽略違約受經濟波動和資產相關性的影響，因此利用Binomial Test常會低估臨界值$d_{k,a}$。然而，在校準違約機率上Binomial Test爲最保守的指標。

2.2.Granularity Adjustment

由於Binomial Test忽略資產相關性的影響，因此導致臨界值$d_{k,a}$被低估。如今我們試著加入資產相關性的影響，藉此放寬臨界值$d_{k,a}$的限制。

根據Gordy(2002)單因子模型的假設：違約受各別因子和系統因子的影響，但各別因子彼此是獨立的，但所有的授信戶皆受相同的系統因子所影響。而系統因子的影響即爲其資產的相關性(ρ)；爲此臨界值$d_{k,a}$的計算公式可改寫成：[3]

$$d_{K,\alpha} \approx k \times q(\alpha, R) + \frac{1}{2}\left\{ 2 \times q(\alpha, R) - 1 + \frac{q(\alpha, R)\left(1 - q(\alpha, R)\right)}{\phi\left(\frac{\sqrt{\rho}\, q(\alpha, R) - t}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \left[\frac{\sqrt{\rho}\, q(1-\alpha, X) - t}{\sqrt{1-\rho}} - \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \left(q(1-\alpha, X) \right) \right] \right\} + 1 \tag{6}$$

[3] 推導過程詳見附錄A1

2.3. Moment Matching

Granularity Adjustment因為假設違約機率呈常態分配，因此臨界值$d_{k,a}$可改寫成算式(6)。若根據Overbeck & Wanger(2000)的設定，利用Moment Matching 來配適違約率時，違約機率則服從貝塔分配(Beta-distribution)。此時臨界值$d_{k,a}$的計算公式可改寫成：[4]

$$d_{K,\alpha} = k \times q(\alpha, Z) + 1 \qquad (7)$$

隨機變數Z，其貝塔分配的機率密度函數為

$$\beta(a,b,x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \qquad (8)$$

接下來我們嘗試著利用本中心之資料，驗證等級內的同質性。一旦當實際違約家數超過各個方法下的臨界值時，表示同一等級內的授信戶違反了同質的假設，需輔以其他的方法對模型進行修正，以符合實際情況。【表2】為同質性驗證結果；百分比為各等級內之授信戶佔總樣本的比率；PD為等級內的估計違約率；家數為各等級內之授信戶個數；Binomial為利用Binomial Test方法所計算出各等級下的違約家數可容忍值；Granularity為利用Granularity Adjustment方法所計算出各等級下的違約家數可容忍值；Moment為利用Moment Matching方法所計算出各等級下的違約家數可容忍值；Default各等級下的實際違約家數；DR：各等級下的實際違約率。

【表2】等級同質驗證

Rating	百分比	PD	家數	Binomial	Granularity	Moment	Default	DR
1	1.59%	0.00%	1651	1	1	1	1	0.06%
2	2.99%	0.93%	3103	47	423	329	7	0.23%
3	3.46%	2.26%	3601	110	724	609	17	0.55%
4	10.46%	2.54%	10869	328	2286	1938	74	0.68%
5	14.78%	3.03%	15362	532	3479	2992	144	0.94%
6	23.32%	4.80%	24235	1267	6761	6025	388	1.60%
7	17.81%	8.25%	18513	1644	6865	6339	484	2.61%
8	16.39%	17.98%	17036	3219	9635	9278	840	4.93%
9	9.20%	40.20%	9566	3994	7749	7710	1155	12.07%

[4] 推導過程詳見附錄A2。

2.4. CIER(condition information entropy ratio)

假設有一信用評等系統，其所產出的評等等級均可對應一個違約機率值，現假設此系統可產出n個評等等級$R=\{R_1,\cdots,R_2\}$，則條件資訊亂度(Conditional Information Entropy)可表示如下：

$$H_1(R)=-\sum_K P(R_K)\big(P(D|R_K)\times\log P(D|R_K)$$

$$+P(N|R_K)\times\log(N|R_K)\big) \qquad (9)$$

其中

$P(D|R_k)$：在評等等級R_k下，等級內授信戶違約的機率。

$P(D|R_k)$：在評等等級R_k下，等級內授信戶正常的機率。

良好的信用評等系統應能對不同狀況的授信戶給予不同的區別等級。實務上，則以條件資訊亂度率(Conditional Information Entropy Ratio，CIER)來評估一信用評等系統對不同信用狀況授信戶所給予的區隔等級品質，其定義如下：

$$CIER=\frac{H_0-H_1(R)}{H_0} \qquad (10)$$

假設違約服從二項分配，則

$$H_0=H_1(p)=-p\log(p)-(1-p)\log(1-p) \qquad (11)$$

P表示所有授信戶的違約機率。

最完美的信用評等系統能將違約授信戶歸於同一等級之內，而且會將正常的授信戶分類於其他等級之中，此時信用評等系統會將違約資訊上的不確定性完全預測出來，因此CIER等於1；對一個沒有任何區隔能力的信用評等系統而言，每個評等等級內的違約授信戶，其分配會與母體違約分配相同，此時信用評等系統並無法提供額外的資訊，則CIER為0。

【表3】為取自Sobehart、Keenan &Stein (2001)的資料與本中心之資料，利用CIER之方法，對等級區隔所嘗試驗證出來的結果。

【表3】CIER

ROA	0.06
Reduced Z-score	0.09
Z-score	0.06
Harzard Model	0.11
Merton Model Variant	0.14
Mood's model	0.19
JCIC	0.10

3. 穩定度分析

藉由觀察評等結果是否會有短期和長期大幅度的變動趨勢，進而分析短期經濟變動情況對長期評等基礎的影響、評等方法的改變使其等級變化情形、各等級的變動是否符合模型的基本假設，或是評等缺失的一種表現，進而分析轉置矩

陣的變動之合理性。

3.1.轉置矩陣的建置

由於分析模型的穩定性，必須了解各評等的變動情況，藉以了解評等變動幅度是否屬於合理範圍。以此結果分析評等結果是否會有短期和長期大幅度的變動趨勢。爲此，各個評等變動的機率(transition probability)，將影響我們對模型穩定性的分析。轉置矩陣建置的方法建議如下(但不限於下列方法)：

A.分類統計方式(cohort approach)

令$P_{i,j}(\Delta_t)$爲經過Δ_t期後，評等由i變成j的機率，通常假設Δ_t爲一年。當期初評等爲i的授信戶共有n_i個，經過一年後這n_i個授信戶變成等級j的有$n_{i,j}$個，則轉置機率的估計值爲 $P_{i,j}(\Delta_t = 1) = \frac{n_{i,j}}{n_i}$ 。一般而言，使用此種方法下，會將下一期沒有評等或未受評的授信戶自樣本中移除。

B.連續統計方法(duration approach)

當轉置矩陣爲時間同變異(time homogeneous)的馬可夫鏈(Markov chain)時，轉置機率的估計值爲介於不同期間下之距離的函數。假設有一密度矩陣(intensity matrix) γ ，其各元素的估計值爲

$$\hat{\gamma}_{i,j} = \frac{n_{i,j}(T)}{\int_0^T Y_i(S)ds} \tag{12}$$

$Y_i(s)$爲在S期下評等爲i的授信戶個數；$n_{i,j}(T)$爲加總各期當中由評等i變成j的授信戶個數。對密度矩陣取指數後便可求得同質變異的馬可夫轉置矩陣。

【表4】[5]爲轉置矩陣建置完成後，所呈現的一個例子。

【表4】轉置矩陣

Start \ End	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	default
AAA	91.93%	7.46%	0.48%	0.08%	0.04%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.64%	91.81%	6.76%	0.60%	0.06%	0.12%	0.03%	0.00%
A	0.07%	2.27%	91.38%	5.12%	0.56%	0.25%	0.01%	0.04%
BBB	0.04%	0.27%	5.56%	87.87%	4.83%	1.02%	0.17%	0.24%
BB	0.04%	0.10%	0.61%	7.75%	81.48%	7.90%	1.11%	1.01%
B	0.00%	0.10%	0.28%	0.46%	6.95%	82.80%	3.96%	5.45%
CCC	0.19%	0.00%	0.37%	0.75%	2.43%	12.13%	60.44%	23.69%

[5]【表4】資料取自於Cynthia&Ron(2000)，S&P排除無評等過的平均一年期轉置矩陣。

3.2. 轉置矩陣變動合理性分析（評等維持率、大幅升降等比率…）。

依據上述轉置矩陣建置的方式，決定一長期評等信用轉換矩陣，檢視此一轉換矩陣各個評等變動的機率；尤其是評等大幅變動的機率，分析評等變動的機率是否隨變動的幅度加大而呈遞減的趨勢；以及等大幅變動的機率是否屬於合理的範圍。

3.3.評等回復合理性分析(評等返回率…)。

檢視連續三年的信用風險模型之預測結果，比較預測的結果是否呈同向變動。當預測結果呈異向變動則為評等回復(Reverse Rating)。令$n_{ij,jk}$(i>j且j<k或i<j且J>k)為評等由i變成j再變為k的授信戶數，n_i乃期初評等為i的總授信戶。評等回復率

$$R_i = \frac{n_{ij,jk}}{n_i} \quad i = 1,\ldots,N \tag{13}$$

評等上下震盪的幅度可依不同情況作修整。但評等回復率應隨上下震盪而成反向關係，即上下震盪的幅度越大，評等回復率越小

3.4. 累積違約機率是否隨時間與等級單調變動。

檢視各年度的累積違約機率，分析累積違約機率是否隨期間增加而呈遞增的趨勢；以及累積違約機率是否隨評等等級下降而呈遞增的趨勢。

3.5. 轉置矩陣之同質性分析(Singular Value Decomposition of mobility：SVD)

在分析穩定性時，必須考慮轉置矩陣之時間同質性(time homogeneous)，以分析模型是否會因短期經濟變動情況而對長期評等基礎造成影響。首先定義單位矩陣I為同質性矩陣，表示受評戶之評等並不隨時間而改變。定義流動性矩陣(mobility matrix) $\tilde{P}$為實際矩陣P與同質性矩陣之差距，表示如下：

$$\tilde{P} = P - I \tag{14}$$

Y.Jafry and T.Schuermann (2004)中透過流動性矩陣的概念，利用奇異值分解(Singular Value Decomposition)方法計算出流動性矩陣之平均奇異值(average of the sigular values of the mobility matrix) M_{svd}，公式如下：[6]

$$M_{svd}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i(\tilde{P}'\tilde{P})}}{N} \tag{15}$$

其中λ_i為第i個特徵值(eigenvalue)。

根據【表4】我們可以計算出S&P排除無評等過的平均一年期轉置矩陣的SVD值為0.1563。

[6] 推導過程詳見附錄A3

四、結語

由於信用評分模型包含的構面很廣泛，單一的驗證並無法涵括所有的情況，因此須輔以多種的驗證方法，使模型得以完善。此外，由於各種統計數值尚無法訂定出所謂的合理範圍，因此必須使用標竿化的方法，利用各種外部資訊甚至於不同模型對相同樣本的評等結果，來了解內建之模型是否夠完善。在模型建構上，有時很難兼顧所有的構面（如評等結果同時最具正確性、最具穩定性及最具等級區隔同質性），銀行應瞭解建置模型之主要目的，依此排定所有構面之優先順位，以期模型能發揮最大之效用。

Reference

Altman and Rijken（2004）〝How rating agencies achieve rating stability〞.

〝Approaches to the Validation of Internal Rating System〞，DEUTSCHE BUNDESBANK Monthly Report September 2003

http://www.bundesbank.de/download/volkswirtschaft/mba/2003/200309_en_rating.pdf

Cynthia McNulty and Ron Levin(2000) 〝Modeling Credit Migration〞 RISK,February 2000

Engelmann B.、Hayden E.、Tasche D.(2003) 〝Measuring the Discriminative Power of Rating System〞，Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Supervision, No. 01/2004, Deutsche Bundesbank.

Gunter Loeffler（2004） 〝An anatomy of rating through the cycle, Journal of Banking & Finance(28)〞 ,p695-p702.

Jafry & Schuermann（2004）〝Measurement Estimation and Comparison of Credit Migration Matrics〞.

Overbeck&Wagner(2000) 〝Term Structure of Loss Cascades in Protfolio Securitisation〞.Working paper

http://www.finance.uni_frankfurt.de/wahrenburg/Lehre/WS01_02/seminare/kreditrisiko/literatur.htm

Sobehart J.、Keenan S.、Stein R(2001) 〝Benchmarking Quantitative Default Risk Model ：A Validation Methodology〞

http://riskcalc.moodysrms.com/us/research/crm/53621.pdf

Tasche D.(2003) 〝A Traffic Light Approach to PD Validation〞，Working paper，http://www-m4.ma.tum.de/pers/tasche/traffic_lights.pdf

附錄A1

利用Gordy(2002)的one factor model，當 $\sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\xi_i \le t$ 表示授信戶違約，令總違約數為D_K

$$D_K = \sum_{i=1}^{K} 1_{\left\{\sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\xi_i \le t\right\}}$$

因為授信戶違約服從二項分配，因此

$$E[D_k] = kp$$

假設違約機率呈常態分配，我們便可求出

$$t = \Phi^{-1}(p)$$

令臨界值$d_{k,a}$為

$d_{k,a}=\min\{d:P[D_k \geq d]1-\leq \alpha\}$

則D_K的第α分位數$q(\alpha,D_k)$為

$q(\alpha,D_k)=\min\{x:P[D_k \leq x] \geq \alpha\}$

因此臨界值$d_{k,a}$可簡寫成

$d_{k,a}=q(\alpha,D_k)+1$

因為 $R_K=\dfrac{Dk}{K}$ ，所以R_K的第α分位數$q(\alpha,R_k)$為

$$q(\alpha,R_K)=\frac{q(\alpha,D_K)}{K}$$

利用泰勒展開式對R_K的第α分位數於R進行二階展開

$$q(\alpha,R_K)=q(\alpha,R+h(Rn-R))\big|_{h=1}$$

$$\approx q(\alpha,R)+\frac{\partial}{\partial h}q(\alpha,R+h(R_n-R))\big|_{h=0}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial h^2}q(\alpha,R+h(R_{n-R}))\big|_{h=0}$$

當K趨近於無窮大時，則

$$\lim_{K\to\infty}R_K=R=\Phi\left(\frac{t-\sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

因此R的第α分位數$q(\alpha,R)$為

$$q(\alpha,R)=\Phi\left(\frac{\sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)+t}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

有了R的第α分位數$q(\alpha,R)$後，我們可以對D_K的第α分位數$q(\alpha,D_k)$化簡為

$$q(\alpha,D_K)\approx k\times q(\alpha,R)+\frac{1}{2}\left\{2\times q(\alpha,R)-1\right.$$

$$+\frac{q(\alpha,R)(1-q(\alpha,R))}{\phi\left(\dfrac{\sqrt{\rho}q(\alpha,R)-t}{\sqrt{1-\rho}}\right)}$$

$$\left.\left[\frac{\sqrt{\rho}q(1-\alpha,X)-t}{\sqrt{1-\rho}}-\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}(q(1-\alpha,X))\right]\right\}$$

附錄A2

假設違約機率為貝塔分配(Beta-distribution)，D_K的第α分位數$q(\alpha,D_k)$則改寫成

$$q(\alpha,D_k)\approx k\times q(\alpha,z)$$

隨機變數Z，其貝塔分配的機率密度函數為

$$\beta(a,b,x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

其參數a，b分別為

$$a=\frac{E[R_K]}{\mathrm{var}[R_k]}(E[R_K](1-E[R_K])-\mathrm{var}[R_K])$$

$$b=\frac{1-E[R_K]}{\mathrm{var}[R_K]}(E[R_K](1-E[R_K])-\mathrm{var}[R_K])$$

其中

$$E[R_K]=p$$

$$\mathrm{var}[R_K]=\frac{K-1}{K}\Phi_2(t,t,\rho)+\frac{p}{k}-p^2$$

利用泰勒展開式我們可以求得

$$\Phi_2(t,t,\rho)\approx\Phi(t)^2+\frac{e^{-t^2}}{2\pi}\left(\rho+\frac{1}{2}\rho^2t^2\right)$$

所以我們可以算出隨機變數Z的期望值和變異數

$$E[Z]=\frac{a}{a+b}$$

$$\mathrm{var}[Z]=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

之後便可求得Z第α分位數$q(\alpha,Z)$，則臨界值$d_{k,a}$為

$$d_{K,\alpha}=k\times q(\alpha,Z)+1$$

附録A3

吾人即可應用此法，尋找符合持續性的流動性矩陣。做法簡述如後：

假設A是m-by-n複數矩陣，我們來看矩陣A*A，其中A*是A轉置之後，每個元素再取共軛複數(complex conjugate), 即 A*ij = Aj i 。如果A*=A 則稱A是自偶(Hermitian)。自偶的矩陣其特徵值是實數。很明顯地，A*A是自偶，所以它的特徵值是實數，而且非負值(nonnegative)。

一個m-by-n矩陣A的奇異值分解，是將A分解成A= USV*, U是m-by-m, V 是n-by-n的么正矩陣(unitary)，S是m-by-n非標準"對角矩陣"，Sij = 0, i ≠j Sii = σi , σi是非負值的實數。我們稱σi為A的奇異值(singular value)，它是A*A矩陣特徵值的平方根。

更詳細地，S= diag ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$), s= min(m,n)而且$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_s \geq 0$。A*A的特徵向量組成V, AA*的特徵向量組成U，說明如下：

AV = US 即 Avi= σ iui , 1≤i ≤min(m,n) , ui ,vi 分別為U, V的行向量。而且 A*A= VS*U*USV* = V(S*S)V* , 或 S*S = V*(A*A)V ,S*S=Dn-by-n對角矩陣，主對角上的元素是 σi2 , i=1,2 ,..., s , 其餘為零。類似的情況AA*= USV*VS*U*= U(SS*)U*, 或 SS* = U*(A*A)U, SS* = D' 是m-by-m對角矩陣，主對角上的元素是 σi2 , i=1,2 ,..., s, 其餘為零。

以下擬以三維信用轉換矩陣為例，說明SVD使用方式：

假設信用轉換矩陣如下：

$$P=\begin{bmatrix}1-p_1 & p_1 & 0\\ 0 & 1-p_2 & p_2\\ 0 & p_3 & 1-p_3\end{bmatrix}$$

則$\tilde{P}$與$\tilde{P}\tilde{P}'$分別為：

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}-p_1 & p_1 & 0\\ 0 & -p_2 & p_2\\ 0 & p_3 & -p_3\end{bmatrix}$$ 以及

$$\tilde{P}\tilde{P}=\begin{bmatrix}p_1^2 & -p_1^2 & 0\\ -p_1^2 & p_1^2+p_2^2+p_3^2 & -(p_2^2+p_3^2)\\ & -(p_2^2+p_3^2) & (p_2^2+p_3^2)\end{bmatrix}$$

則$\tilde{P}\tilde{P}$特徵值為：

$$\begin{bmatrix}p_1^2+p_2^2+p_3^2+\sqrt{p_1^4+p_2^4+p_3^4-p_1^2(p_2^2+p_3^2)+2p_2^2p_3^2}\\ p_1^2+p_2^2+p_3^2-\sqrt{p_1^4+p_2^4+p_3^4-p_1^2(p_2^2+p_3^2)+2p_2^2p_3^2}\\ 0\end{bmatrix}$$

因此，$\tilde{P}$的模(norm)—即最大特徵值的平方根為：

$$\|\tilde{P}\|=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+\sqrt{p_1^4+p_2^4+p_3^4-p_1^2(p_2^2+p_3^2)+2p_2^2p_3^2}}$$

存在一特定向量使得 $\|\tilde{P}x\max\|=\|\tilde{P}\||x\max|$

$$\mathrm{Xmax}=\begin{bmatrix}p_1^2-p_2^2-p_3^2+\sqrt{p_1^4+p_2^4+p_3^4-p_1^2(p_2^2+p_3^2)+2p_2^2p_3^2}\\ p_2^2+p_3^2-\sqrt{p_1^4+p_2^4+p_3^4-p_1^2(p_2^2+p_3^2)+2p_2^2p_3^2}\\ 1\end{bmatrix}$$

如p1=p2=p3=0.1，則x'max=(-0.01 0.02 1)

此矩陣之SVD等於

$$M_{svd}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1\sqrt{3(p_2^2+p_3^2)}}$$